

文科高等数学

期末复习



**我的心里只有一件事
就是 学习**

设函数 $z = f(x)$ 在其定义区间 \mathbb{R} 上可导, 且对任意的

$$x, y \text{ 都有 } f(x + y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - 2f(x)f(y)},$$

(1) 求 $f(0)$

(2) 证明 $f'(x) = f'(0)[1 + 2f^2(x)]$

(1) 令 $x = 0$, $y = 0$, 则有 $f(0) = \frac{f(0)+f(0)}{1-2f(0)f(0)}$

那么 $f(0) - 2f^3(0) = 2f(0)$, 整理得到

$$f(0)(2f^2(0) + 1) = 0。从而有 $f(0) = 0$$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) + f(\Delta x)}{1 - 2f(x)f(\Delta x)} - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) + 2f^2(x)f(\Delta x)}{\Delta x[1 - 2f(x)f(\Delta x)]} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x)[1 + 2f^2(x)]}{\Delta x[1 - 2f(x)f(\Delta x)]} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} \cdot \frac{1 + 2f^2(x)}{1 - 2f(x)f(\Delta x)} = f'(0)[1 + 2f^2(x)]
\end{aligned}$$

这里的最后一步用到了 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\Delta x) = f(0) = 0$ 。这是因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导可以推出在 $x=0$ 处连续，从而极限值等于函数值

设 $y = \ln(\sec x + \tan x)$, 则 $dy =$

- A $\tan x \, dx$
- B $\sec x \, dx$
- C $(\tan x + \sec x) \, dx$
- D $1/(\tan x + \sec x) \, dx$

3. 计算 $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4} dx$, ($a > 0$).

解: 令 $x = a \sec t$, 则

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4} dx &= \int \frac{\sqrt{a^2 \sec^2 t - a^2}}{a^4 \sec^4 t} d(a \sec t) \\ &= \int \frac{a \tan t}{a^4 \sec^4 t} \cdot a \sec t \cdot \tan t \cdot dt = \int \frac{\tan^2 t}{a^2 \sec^3 t} dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int \sin^2 t \cos t dt = \frac{1}{a^2} \int \sin^2 t d \sin t \\ &= \frac{\sin^3 t}{3a^2} + C = \frac{1}{3a^2} \left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \right)^3 + C = \frac{(\sqrt{x^2 - a^2})^3}{3a^2 x^3} + C \end{aligned}$$

设 A 、 B 为三阶方阵， I 为三阶单位矩阵，且 $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，

$AB = 2A + B$ ，求 $(A - I)^{-1}$ 。

解: $AB = 2A + B \Rightarrow (A - I)B = 2A$

$$\Rightarrow (A - I)B = 2(A - I) + 2I$$

$$\Rightarrow (A - I)(B - 2I) = 2I$$

故 $(A - I)\left(\frac{B}{2} - I\right) = I$

即 $(A - I)^{-1} = \frac{B}{2} - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

复习顺序

1. 三套期末真题
2. 八次随堂测验的题目当成填空做复习
3. 准备带入考场的知识点A4纸

如果还有时间

4. 结合答案解析看看历次作业题
5. 看看这学期课上用的课件

此外

6. 注意考试时合理安排时间，遇到不会做的题目可以先跳过
7. 记得考试前仔细阅读期末考试说明。带水笔、2B铅笔、橡皮、准考证、学生证、身份证。

高分喷雾

